Cardinaux

I Généralités:

Déf: Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F ont le même cardinal ou sont équipotents s'il existe une bijection $f : E \to F$

* Ceci définit une relation d'équivalence sur la classe des ensembles

Ex: E et $P(E)$ ne sont pas équipotents

S/ il existe une injection de E dans $P(E)$:

$$\left(\begin{array}{l} E \to P(E) \\ x \mapsto \{x\} \end{array}\right)$$

ABS: Soit S une surjection de E sur $P(E)$
Soit $A = \{x \in E \mid x \notin S(x)\}$
donc $\exists a \in E$ tq $S(a) = A$

$\left|\begin{array}{l} \text{si } a \in A,\ a \in S(a) \text{ ABS} \\ a \notin A : \text{par déf } a \notin S(a) \text{ ie } a \in A \text{ ABS} \end{array}\right.$

Cardinaux finis et infinis:
Un ensemble E est dit fini s'il existe une bijection avec un segment $[\![0, n]\!]$ de $\mathbb{N}$, le cardinal de E est alors $n+1$
On pose $|E| = n+1$ et $\mathrm{card}(\emptyset) = 0$

Prop: Si E, F sont finis et si $f : E \to F$ est injective elle est bijective

Def : E est dit infini s'il n'est pas fini.

Ex 1) Si E est infini, il existe une injection $f : \mathbb{N} \to E$

2) E est infini $\Leftrightarrow \exists f : E \to E$ injective et non surjective.

S/ 1. $E \neq \emptyset$. On choisit $a_0 \in E$, $f(0) = a_0$

Supposons donnés pour $n \in \mathbb{N}$ $f(0), \dots, f(n)$ deux à deux distincts

$E \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$ est alors non vide (sinon...)

prenons $b \in F$ et posons $f(n+1) = b$

f est alors une injection (exo pers) $\mathbb{N} \to E$

2. $\Leftarrow$ Si E est fini alors d'après ~~l'ex~~ (non précédente) c'est absurde

$\Rightarrow$ Soit $i : \mathbb{N} \to E$ une injection

~~Soit~~ Si $x \in E \setminus i(\mathbb{N})$ $f(x) = x$

Soit $x \in i(\mathbb{N})$ $x = i(n)$, n unique, $f(x) = i(n+1)$

Posons

Soit $(x, y) \in E^2$ tq $f(x) = f(y)$

si $x \in i(\mathbb{N})$, alors y aussi

donc $x = y$

sinon on a aussi $x = y$

donc f injective

Soit $x \in E$ tq $f(x) = i(0)$ donc $x \in i(\mathbb{N})$

donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $n+1 = 0$

ABS

II Ensembles dénombrables :

Déf : Soit E un ensemble. On dit que E est dénombrable s'il est fini ou s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to E$

Obs : Si $E \approx F$, E dénombrable $\Leftrightarrow$ F aussi

Ex : 1. $\mathbb{N}^*$ est dénombrable : $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N}^* \\ x \mapsto x+1 \end{array}$

2. $\mathbb{Z}$ ———— : $\begin{cases} f(x) = 2|x| - 1 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = 2x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Props : 1. Une partie A de $\mathbb{N}$ est dénombrable

2. Si $f : E \to F$ est injective et F est dénombrable, E l'est aussi

3. si $F \to E$ est surjective, et si F dénombrable, E aussi

4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable

5. Le produit de deux dénombrables l'est.

6. $\mathbb{Q}$ est dénombrable

7. si I est dénombrable et si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille d'ens dén, $\bigcup_{i \in I} E_i$ l'est

D/ 1) si A est ~~dénombrable~~ fini OK

Supposons A infinie

On pose $f(0) = \min A$, supposons que $f(0) \neq \ldots \neq f(n)$ 2 à 2 $\neq$

On pose f $f(n+1) = \min A \setminus \{f(0), \ldots, f(n)\}$

La fonction f ~~ainsi~~ définie est injective

f est surjective : S'il existe $a \in A \setminus f(\mathbb{N})$ il vient :

$\forall n \in \mathbb{N}$ ~~a~~ $\{f(0), \ldots, f(n)\}$

donc ———— $a \geq \min A \setminus \{f(0), \ldots, f(n)\} = f(n+1)$

• Ex pers : Verifier que $f \nearrow$

② Si F est fini, E aussi (f est une bij de E sur f(E) partie de F)

Si F est infini, il est en bijection avec $\mathbb{N}$, notons avec φ

$\varphi \circ f : E \to \mathbb{N}$ est une injection, si $A = \varphi \circ f(E)$

~~Alors~~ $\varphi \circ f$ est une bijection $E \to A$. Or d'après 1), A est dén, AQT

③ Section : Pour tout $x \in E$, $S^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$

On choisit : $y = f(x) \in S^{-1}(\{x\})$; il vient donc

$\forall x \in E \quad S \circ f(x) = x$

f est injective : Soit $(x,x') \in E^2$ $f(x) = f(x')$ on a

$S(f(x)) = S(f(x'))$ donc $x = x'$

2) s'applique

④ RM : $E_p = \{p^n\}_{n \geq 1}$ p est premier (si $p \neq q$ $E_p \cap E_q = \emptyset$)

Soit $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$

$(m,n) \to 2^m(2n+1)$

f est bijective : Soit $l \in \mathbb{N}^*$, $l = 2^{V_2(l)} \underbrace{3^{V_3(l)} \cdots p^{V_p(l)}}_{\text{impair}}$

Si $f(m,n) = f(m',n')$ donc $2^m(2n+1) = 2^{m'}(2n'+1)$

On suppose $m' \geq m$, d'où $2^{m'-m} / 2n+1$ et donc

$m' - m = 0$ puis $n = n'$

Ex : Soit $X \subset [\![1,2n]\!]$; avec $|X| \geq n+1$. Mq $\exists (a,b) \in X^2$, $a \neq b$ et $a | b$

D/ On écrit $\forall x \in X$: $x = 2^{k(x)}(2l(x)+1)$

Les nombres de la forme $2^{\ell(x)}+1$ sont tous dans $[1, 2n]$, il y en a en plus n. Il existe donc $a \neq b$ de X (tiroirs!) tq $2^{\ell(a)}+1 = 2^{\ell(b)}+1$ par ex $k(a)<k(b)$
il vient $a | b$

⑤ **Lemme** : si E dén non vide, il existe une surjection $s_E : \mathbb{N} \to E$

De même si $F \neq \emptyset$ $\exists\, s_F : \mathbb{N} \to F$ surj

L'application $S \left(\begin{array}{l} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E \times F \\ (m,n) \to (s_E(m), s_F(n)) \end{array} \right.$

est surjective : $E \times F$ est dénombrable.

⑥ $S \left(\begin{array}{l} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \xrightarrow{S} \mathbb{Q} \\ (p,q) \to p/q \end{array} \right)$ est surjective et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable.

⑦ (Très utile)

Par ex $I = \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $E_n \neq \emptyset$. Soit S_n une surjection : $\mathbb{N} \to E_n$; on pose $\left(\begin{array}{l} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \\ (m,n) \longmapsto s_n(m) \end{array} \right.$

Soit $x \in \bigcup E_n$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq $x \in E_{n_0}$

en moyennant la surj de S_{n_0} $m \in \mathbb{N}$

tq $S_{n_0}(m) = x$

<u>Ex</u>: $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

S/ On va Mq $[0,1[$ n'est pas dénombrable

Par l'absurde $[0,1[= \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

On écrit $x_n = 0, x_{1n} \dots x_{qn} \dots$ dév décimal propre

$\nexists\, q\ \forall q' \geq q\ x_{q'} = 9$

On construit une suite $y_q \in \{0, \dots, 8\}$ tq

$\forall q \in \mathbb{N}^* \quad y_q \neq x_{q,q}$

Soit $y = 0, y_1 \dots y_q \dots \in [0,1[$, par hypothèse

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $y = x_{n_0}$ alors avec $q = n_0$ il vient

propre

$y_{n_0} = x_{n_0, n_0}$

Exercices: ① Soit $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, non vides, deux à deux disjoints. Alors Λ est dénombrable

D/ $\forall \lambda \in \Lambda \ \exists r_\lambda \in I_\lambda \cap \mathbb{Q}$

Si $\lambda \neq \lambda'$, par hyp $I_\lambda \cap I_{\lambda'} = \emptyset$ donc $r_\lambda \neq r_{\lambda'}$

$f\begin{pmatrix} \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q} \\ \lambda \longmapsto r_\lambda \end{pmatrix}$ est alors dénombrable

② On dit qu'une partie Ω de $\mathbb{R}$ est ouverte lorsque

$\forall x \in \Omega \quad \exists \varepsilon > 0, \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \Omega$

Ex: Un intervalle $I = (a, b)$ est ouvert au sens précédent ssi il est ouvert au sens de l'ordre

Ainsi: $I =]a, b]$ n'est pas ouvert : sinon $\exists \varepsilon > 0 \ ]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\subset I$ or $b + \frac{\varepsilon}{2} \in I$

Ex: Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ (ou >0 ABS ou ...) est ouvert. Si $f(x_0) \neq 0$, il existe par la def $\varepsilon > 0$ tq $\forall x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}|f(x_0)|$

$|f(x_0)| - |f(x)| < \frac{1}{2}|f(x_0)|$

donc $\frac{1}{2}|f(x_0)| < |f(x)|$

Ex: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ ~~~~ Mq Ω est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

S/ * On introduit la relation $\sim$ sur Ω^2

$$x \sim y \iff [x,y] \subset \Omega$$

$\sim$ est symétrique, réflexive ; Soit $(x,y,z) \in \Omega^3$ tq

$x \sim y$ et $y \sim z$ alors $[x,y] \cup [y,z]$ $[\min(x,y,z), \max(x,y,z)]$ est un intervalle $\subset \Omega$: $\sim$ est d'équivalence

** Soit I une classe selon $\sim$; Soit $x,y \in I$

On sait $[x,y] \subset \Omega$

Si $z \in [x,y]$, $[x,z] \subset [x,y] \subset \Omega$ donc $z \sim x$
$z \in I$

Bref : I est convexe, c'est un intervalle.

I est un intervalle <u>ouvert</u> (?) :

Soit $x \in I$ il existe $\varepsilon > 0$ tq $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \Omega$

delà $\forall y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, $[x,y] \subset \Omega$

et donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I$

(CC) Ω est réunion disjointe des classes selon $\sim$ qui sont des intervalles ouverts en nombre dénombrable

③ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone, Δ_f l'ensemble des points de discontinuité de f, montrer que Δ_f est dénombrable

D/ On suppose f croissante. Si $a \in \mathbb{R}$, on sait que
$$f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$$
ainsi $a \in \Delta_f \Leftrightarrow f(a^-) < f(a^+)$

Posons, pour $a \in \Delta_f$, $I_a =]f(a^-), f(a^+)[$

Soit $b \in \Delta_f$, $b \neq a$ $\begin{cases} a<b \underset{\text{déf}}{\Rightarrow} f(a^+) \leq f(b^-) \\ a>b \Rightarrow f(a^-) \geq f(b^+) \end{cases}$ $\begin{cases} \text{si } a<x<b \\ f(a^+) \leq f(x) \leq f(b^-) \end{cases}$

et donc $I_a \cap I_b = \emptyset$

(cc) $(I_a)_{a \in \Delta_f}$ est une famille d'ouvert 2 à 2 disjoints donc d'après l'Ex 1 Δ_f est dénombrable.

☺

④ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe

Mq $\{a \in \mathbb{R} \mid f \text{ n'est pas dérivable en } a\}$ est dénombrable

S/ Soit $a \in \Delta$, on pose $I_a =]f'_g(a), f'_d(a)[$

Si $a, b \in \Delta$, avec $a < b$ et $x \in]a,b[$

il vient $f'_d(a) \leq P_a(x) = P_x(a) \leq P_x(b) = P_b(x) \leq f'_g(b)$

et donc $I_a \cap I_b = \emptyset$, on applique Ex 1

Nombres algébriques :
$\alpha \in \mathbb{C}$ est dit algébrique si $\exists P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\} : P(\alpha) = 0$
ou $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} : P(\alpha) = 0$

Mq l'ensemble $\overline{\mathbb{Q}}$ est dénombrable
(ens des nombres algébriques)

Pour $n \in \mathbb{N}$: $P(X) = a_d X^d + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$

on envisage $H_n = \{P \in \mathbb{Z}[X] \mid d \leq n$ et $|a_d|, \dots, |a_0| \leq n\}$

$|H_n| \leq (2n+1)^{n+1}$ { Pour n assez grand, $P \in H_n$

$\mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} = \bigcup H_n$ est dénombrable

$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}} Z(P)$ / fini   une réunion dén. d'ens finis $\rightarrow$ dénombrables